This question paper contains 3 printed pages.

B.A./B.Sc. (Pt. - III) **Roll No. ....**

3125/3175-A-II

Mat. - II

B.A./B.Sc. (Part - III) EXAMINATION - 2020

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A/ B.Sc. (Hons.) Part - III]

(Three - Year Scheme of 10+ 2+3 Pattern)

MATHEMATICS - II

(Complex Analysis)

Time Allowed: Three Hours

Maximum Marks: Arts : 53/ Science Old Scheme : 50/

New Scheme : 40

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidates should write their answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर–पुस्तिका नहीं दी जायेगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर–पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी एक प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गये विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर–पुस्तिका में अलग–अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न–पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I/ इकाई – I

1. (a) Show that the function $f(z)=\sqrt{|xy|}$ satisfies the Cauchy - Riemann equations at the origin but is not analytic at the point.

   प्रदर्शित करें कि फलन $f(z)=\sqrt{|xy|}$ मूल बिंदु पर कौशी – रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है परन्तु इस बिंदु पर विश्लेषिक फलन नहीं है।

   (b) Show that function $u=\cos x \cosh y$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

   प्रदर्शित करें कि फलन $u=\cos x \cosh y$ प्रसंवादी फलन है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

2.(a) Prove that the function $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ satisfies Laplace's equation and find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

सिद्ध करें कि फलन $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ लापलास समीकरण को संतुष्ट करता है तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात करें।

(b) Show that (प्रदर्शित करें कि)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}$$

UNIT - II/ इकाई – II

3.(a) Evaluate (मान ज्ञात करें)

$$\int_0^{1+i} z^2\, dz$$

(b) Evaluate (मान ज्ञात करें)

$$\int_c (z^2 + 3z + 2)\, dz$$

Where c is the arc of the cycloid $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ between the points (0,0) and $(\pi a, 2a)$.

जहाँ c चक्रण $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$, का बिन्दुओं (0,0) तथा $(\pi a, 2a)$ के मध्य चाप है।

4.(a) Evaluate (मान ज्ञात करें)

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz$$

(b) Using Cauchy's integral formula, find the value of

(कौशी समाकल सूत्र का प्रयोग कर निम्न का मान ज्ञात करें)

$$\int_c \frac{e^{3z}}{z - \pi i}\, dz$$, (where c is a circle $|z-1| = 4$)

(जहाँ c एक वृत $|z-1| = 4$ है)

UNIT - III/ इकाई – III

5.(a) Expand e^z and $\sin z$ in a Taylor's series about $z = 0$ and determine the region of convergence in each case.

फलनों e^z तथा $\sin z$ का $z = 0$ के सामीप्य में टेलर श्रेणी में प्रसार करें तथा प्रत्येक श्रेणी के अभिसारी होने का क्षेत्र ज्ञात करें।

(b) Represent the function $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ by a series of negative powers of (z-1) which converges to f(z) when $0 < |z-1| < 2$.

फलन $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ को (z-1) की ऋणात्मक घातों के रूप में व्यक्त करो जो कि f(z) को अभिसृत होता है जबकि $0 < |z-1| < 2$.

6.(a) If the function f(z) is analytic and single valued in $|z - a| < R$, prove that for $0 < r < R$.

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} P(\theta)\, e^{-i\theta}\, d\theta$$ where $P(\theta)$ is the real part of $f(a+re^{i\theta})$.

यदि $|z - a| < R$ में f(z) विश्लेषिक तथा एक मानीय फलन हो तो $0 < r < R$ के लिये सिद्ध करें कि

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} P(\theta)\, e^{-i\theta}\, d\theta$$,जहाँ $P(\theta)$, $f(a+re^{i\theta})$ का वास्तविक भाग है।

(b) Find the different expansions of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in powers of z, which are valid for the regions

(i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 3$ (iii) $|z| > 3$.

फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का, z की घातों में प्रसार करें, जो कि निम्न क्षेत्रों में वैध है :

(i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 3$ (iii) $|z| > 3$.

UNIT - IV/ इकाई – IV

7.(a) Find the kind of singularities of the following functions:

निम्न फलनों की विचित्रताओं का प्रकार ज्ञात करें :

(i) $\frac{1}{\sin z - \cos z}$ at (की) $z = \frac{\pi}{4}$

(ii) $f(z) = \frac{1-e^{z}}{1+e^{z}}$ at (की) $z = \infty$

(b) Find the kind of singularity of function

$$f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$$

फलन $f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ की $z=\pi$ पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात करें।

8.(a) Prove that every polynomial equation $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$, where the degree $n \geq 1$ and $a_n \neq 0$ has at least one root.

प्रमाणित करें कि प्रत्येक बहुपद समीकरण $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n = 0$, यहाँ पर कोटि $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, का कम से कम एक मूल है।

(b) Find the residues of $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at $z = 1, 2, 3$ and infinity and show that their sum is zero.

$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1, 2,$ व 3 एवं अनन्त पर अवशेष ज्ञात करें तथा प्रदर्शित करें कि उनका योग शून्य है।

UNIT - V/ इकाई – V

9. Find the image of the infinite $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ strip under the transformation $w = \frac{1}{z}$

रूपान्तरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात करें।

10. Evaluate (मान ज्ञात करें)

$$\int \frac{\cos 2\theta}{\text{[illegible]}\cos\theta}\, d\theta$$

http://www.uoronline.com