

**1125/1175-II****B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION - 2022**

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

**MATHEMATICS-II**

(Calculus)

Time Allowed : Three Hours

②

Maximum Marks : 40 for Science, 53 for Arts

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : विज्ञान के लिए 40 तथा कला के लिए 53 अंक

Note/सूचना :

1. Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.  
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
2. Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.  
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखिए।

**UNIT - I / इकाई - I**

1. (a) If  $x$  is positive, then test the convergence of the following series. 4, 4 / 6, 5  
यदि  $x$  धनात्मक हो, तो निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

$$\frac{2}{3}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 x^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 x^4 + \dots$$

- (b) Examine the convergence of the following series :

निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

2. (a) Show that the following series is conditionally convergent. 4, 4 / 6, 5  
प्रदर्शित कीजिए कि निम्न श्रेणी सह-प्रतिबन्ध अभिसारी है।

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

- (b) Expand the following function in power series.

निम्नलिखित फलन का घात श्रेणी में प्रसार कीजिए।

 $\cos x$

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) Show that the pedal equation of the curve  $\frac{l}{\epsilon} = 1 + e \cos \theta$ ,  $e < 1$  is  $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{2l}{\epsilon} - 1 + e^2 \right)$ . 4, 4 / 6, 5

सिद्ध कीजिए कि वक्र  $\frac{l}{\epsilon} = 1 + e \cos \theta$ ,  $e < 1$  का पदिक समीकरण है  $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{l^2} \left( \frac{2l}{\epsilon} - 1 + e^2 \right)$

- (b) Show that at any point on the equiangular spiral  $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ , the radius of curvature is  $\rho = r \operatorname{cosec} \alpha$  and that it subtends a right angle at the pole.

सिद्ध कीजिए कि समान कोणिक सर्पिल  $r = ae^{\theta \cot \alpha}$  के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या  $\rho = r \operatorname{cosec} \alpha$  होती है तथा यह ध्रुव पर समकोण बनाती है।

4. (a) If  $u = (1 - 2xy + y^2)^{-1/2}$ , prove that  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 0$  4, 4 / 6, 5

यदि  $u = (1 - 2xy + y^2)^{-1/2}$ , सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 0$

- (b) If  $u = x \sin^{-1} (y/x)$ , prove that  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

यदि  $u = x \sin^{-1} (y/x)$ , सिद्ध कीजिए कि  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Find the envelope of the family ellipses  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , when  $a + b = c$ ,  $c$  being a constant. 4, 4 / 6, 5

दीर्घवृत्तों  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि  $a + b = c$ , जहाँ  $c$  अचर है।

- (b) Find the maxima and minima of  $u = x^2 + y^2 + z^2$  subject to the conditions  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  and  $lx + my + nz = 0$ .

प्रतिबन्धों  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  तथा  $lx + my + nz = 0$  के अन्तर्गत  $u = x^2 + y^2 + z^2$  के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

6. (a) Find the asymptotes of the following curve. 4, 4 / 6, 5

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

$$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$$

- (b) Trace the following curve.

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$r = a(\sec \theta + \cos \theta)$$

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Show that  $\Gamma(m)\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  4, 4 / 5, 5

प्रदर्शित कीजिए कि  $\Gamma(m)\Gamma(m + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$

- (b) If the region A of the integration is the triangle given by  $y=0$ ,  $y=x$  and  $x=1$ , then show that

$$\iint_A \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

यदि समाकलन का क्षेत्र A रेखाओं  $y=0$ ,  $y=x$  तथा  $x=1$  से घिरा हुआ त्रिभुज हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$\iint_A \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

8. (a) Change the order of integration in the following integral. 4, 4 / 5, 5  
निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए।

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} V(x,y) dx dy$$

- (b) Evaluate  $\iiint xyz dx dy dz$  where the region of integration is the volume of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ in the positive octant.}$$

समाकल  $\iiint xyz dx dy dz$  का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ समाकलन का क्षेत्र धनात्मक अष्टांशक में दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ है।}$$

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Prove that the length of the arc from the vertex to any point on the cycloid  $x=a(\theta + \sin\theta)$ ,  $y=a(1 - \cos\theta)$  is  $\sqrt{8ay}$ . Also, prove that whole length of an arc of the curve is  $8a$ . 4, 4 / 5, 5

सिद्ध कीजिए कि चक्रज  $x=a(\theta + \sin\theta)$ ,  $y=a(1 - \cos\theta)$  पर चाप की लम्बाई शीर्ष से किसी भी बिंदु पर  $\sqrt{8ay}$  है।

यह भी सिद्ध कीजिए कि वृत्त की एक चाप की सम्पूर्ण लम्बाई  $8a$  है।

- (b) Find the area between the parabola  $x^2=4y$  and the line  $x=4y-2$ .  
परवलय  $x^2=4y$  तथा रेखा  $x=4y-2$  के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. (a) Find the area of the surface of a cone whose semi-vertical angle is  $\alpha$  and base is a circle of radius  $r$ . 4, 4 / 5, 5

उस शंकु के पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका अर्धशीर्ष कोण  $\alpha$  तथा आधार एक  $r$  त्रिज्या का वृत्त है।

- (b) Find the volume of the solid generated by revolving the lemniscate  $r^2=a^2\cos 2\theta$  about the tangent at the pole.

लैमनिस्केट  $r^2=a^2\cos 2\theta$  को ध्रुव पर स्पर्शरेखा के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।