

B.A./B.Sc. (Part-I)

1125/1175-III

B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION, 2023

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-I]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-III

(Analytic Geometry and Optimization Theory)

Time Allowed : 3 Hours

Maximum Marks : 40 for Science, 53 for Arts

समय : 3 घंटे

अधिकतम अंक : विज्ञान के लिए 40 तथा कला के लिए 53

Note/सूचना :

1. Attempt five questions in all, selecting one question from each Unit.
प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
2. All questions carry equal marks.
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
3. Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.
प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) Prove that in a conic, the semi latus rectum is the harmonic mean between the segments of any focal chord.
सिद्ध कीजिए कि शांकव में अर्द्धनाभिलम्ब नाभिय जीवाओं के सिरो की नाभी से बीजगणितीय दूरियों का हरात्मक माध्य होता है।

- (b) Show that the equation $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ and $\frac{1}{r} = -1 + e \cos \theta$ represent the same conic.

प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ तथा $\frac{1}{r} = -1 + e \cos \theta$ एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

2. (a) Prove that the line $\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ will touch the conic $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$, if $(A - e)^2 + B^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ शांकव $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ को स्पर्श करेगी यदि $(A - e)^2 + B^2 = 1$

- (b) Prove that the equation of the director circle of the conic $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ is

$$r^2(1 - e^2) + 2 l e r \cos \theta - 2 l^2 = 0.$$

सिद्ध कीजिए कि शांकव $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ के नियामक वृत्त का समीकरण $r^2(1 - e^2) + 2 l e r \cos \theta - 2 l^2 = 0$ होगा।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) A sphere of constant radius k passes through the origin and meets the axes in A, B, C. Prove that the locus of the centroid of the triangle ABC is $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$.

अचर त्रिज्या k का एक गोला मूल बिन्दु से गुजरता है एवं निर्देशाक्षों को A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ है।

- (b) Find the equation of the sphere which touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z - 3 = 0$ at the point $(1, 1, -1)$ and passes through the origin.

मूल बिन्दु से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोले $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z - 3 = 0$ को $(1, 1, -1)$ पर स्पर्श करता है।

4. (a) Show that the equation to the cone whose vertex is the origin and the guiding curve $z = k, f(x, y) = 0$, is $f\left(\frac{xk}{z}, \frac{yk}{z}\right) = 0$.

सिद्ध कीजिए कि उस शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है और निर्देशक वक्र $z = k, f(x, y) = 0$ है,

$$f\left(\frac{xk}{z}, \frac{yk}{z}\right) = 0 \text{ होगा।}$$

- (b) Prove that the semi-vertical angle of a right circular cone, admitting sets of three mutually perpendicular generators is $\tan^{-1} \sqrt{2}$.

यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु के तीन जनक परस्पर लम्बे हैं, तो सिद्ध करो कि अर्द्धशीर्ष कोण का मान $\tan^{-1} \sqrt{2}$ है।

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) Find the equation of a cylinder, which envelopes the conicoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ and whose generators are parallel to the line which d.c.'s l, m, n .

शांकवज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अन्वालोपी बेलन के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएँ उस रेखा के

समान्तर हैं जिसकी दिक् कोज्याएँ l, m, n हैं।

- (b) Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is. $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x - y + z = 3$ है।

6. (a) Find the equation to the tangent planes which contain the line given by $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ and touch the conicoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$.

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ से जाते हैं और शंकुवज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करते हैं।

- (b) Tangent planes are drawn to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ through (α, β, γ) . Prove that the perpendicular to them from the origin generate the cone.

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर बिन्दु (α, β, γ) से स्पर्श समतल खींचे गये हैं। सिद्ध कीजिए कि उन पर

मूल बिन्दु से डाले गये लम्बों द्वारा जनित शंकु निम्न है :

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$. Which pass through the point $(-1, 0, 3)$. <https://www.uoronline.com>

अतिपरवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ के बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Prove that locus of the point of intersection of perpendicular generators is the curve of intersection of the hyperboloid and the director sphere.

सिद्ध कीजिए कि लम्ब जनकों के प्रतिच्छेद-बिन्दु का बिन्दु पथ नियामक गोला और अतिपरवलयज का प्रतिच्छेदी वक्र होता है।

8. (a) Reduce the equation $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$ to the standard form.

समीकरण $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$ को मानक रूप में समानयन कीजिए।

- (b) Find the principal directions and principal planes of the following conicoid :

$$2x^2 + 20y^2 + 18z^2 - 12yz + 12xy + 2zx + 6y - 2z - 2 = 0$$

निम्न शंकुवज की मुख्य दिशाएँ एवं मुख्य तल ज्ञात कीजिए :

$$2x^2 + 20y^2 + 18z^2 - 12yz + 12xy + 2zx + 6y - 2z - 2 = 0$$

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Prove that the set of all convex combination of a finite number of points x_1, x_2, \dots, x_n is a convex set.

सिद्ध कीजिए कि x_1, x_2, \dots, x_n परिमित बिन्दुओं के सभी अवमुख संघों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है।

- (b) Solve the following L.P.P by simplex method.

$$\text{Max } Z = x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$\text{and } x_1, x_2 \geq 0$$

निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल कीजिए।

$$\text{अधि. } Z = x_1 + 5x_2$$

$$\text{प्रतिबंध } 3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 2$$

$$\text{तथा } x_1, x_2 \geq 0$$

10. (a) Prove that the dual of the dual of a primal problem is the primal.

सिद्ध कीजिए कि किसी आद्य समस्या के द्वैती की द्वैती आद्य समस्या ही होती है।

- (b) Write the dual of the following L.P.P.

$$\text{Min } Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t. } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

$x_1, x_2 \geq 0$ and x_3 is unrestricted in sign

निम्न रेखिक प्रोग्रामन समस्या की द्वैती समस्या लिखिए

$$\text{निम्न. } Z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{प्रति. } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

$x_1, x_2 \geq 0$ और x_3 चिन्ह में अप्रतिबन्धित है

- o o o -