

This question paper contains 3 printed pages.

Roll No.

2125/2175-I

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2024
(Common for the faculties of Arts & Science)

[Also Common with subsidiary paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-II]
(Three Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-I

(Real Analysis)

Paper-I

Time Allowed: Three Hours
समय: 3 घंटे

Maximum Marks: 53 for Arts and 40 for Science
अधिकतम अंक: कला के लिए 53 तथा विज्ञान के लिए 40

Write your roll number on question paper before start writing answer of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर अपना रोल नंबर अवश्य लिखें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each unit.

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Each question is of equal marks.

प्रत्येक प्रश्न समान अंक के हैं।

UNIT-I / इकाई-I

1. (a) Show that $\sqrt{2}$ is not a rational number.
प्रदर्शित कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।
(b) Find the limit points of the set of integers (Z) and set of rational numbers (Q).
पूर्णाकों के समुच्चय (Z) तथा परिमेय संख्याओं के समुच्चय (Q) के सभी सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए।
2. (a) Prove that union of two closed sets is a closed set.
सिद्ध कीजिए कि दो संवृत समुच्चयों का संघ एक संवृत समुच्चय होता है।
(b) Show that an open interval (a, b) of R is not compact.
प्रदर्शित कीजिए कि R का एक विवृत अन्तराल (a, b) संहत नहीं है।

UNIT-II / इकाई-II

3. (a) If $\{x_n\}$ is a convergent sequence, then show that its limit is unique.
यदि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम है, तब प्रदर्शित कीजिए कि इसकी सीमा अद्वितीय होगी।
(b) Prove that the sequence $\{x_n\}$, where $x_n = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} : \forall n \in \mathbb{N}$ is convergent.
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$, जहाँ $x_n = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\} : \forall n \in \mathbb{N}$ अभिसारी है।

4. (a) Prove that every Cauchy sequence is bounded.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिवद्ध होती है।
- (b) If a function 'f' is continuous on [a, b], then prove that it is bounded in that interval.
यदि फलन 'f' संवृत अन्तराल [a, b] में संतत है, तब सिद्ध कीजिए कि वह उस अन्तराल में परिवद्ध होता है।

UNIT-III / इकाई-III

5. (a) Show that $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)$ does not exist.
प्रदर्शित कीजिए कि $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)$ का अस्तित्व नहीं है।
- (b) Find a number α so that the following function is continuous on the origin -

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

एक संख्या α इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर संतत है -

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. (a) Verify Rolle's Theorem for the following function -

$$f(x) = e^x \sin x ; \forall x \in [0, \pi]$$

निम्न फलन के लिए रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए -

$$f(x) = e^x \sin x ; \forall x \in [0, \pi]$$

- (b) Show that the following function is not differentiable at (0,0) -

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न फलन बिन्दु (0,0) पर अवकलनीय नहीं है -

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

UNIT-IV / इकाई-IV

7. (a) Show that the following function is not R-integrable on [0,1] -

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 1 ; \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न फलन [0,1] पर R-समाकलनीय नहीं है -

$$f(x) = \begin{cases} 0 ; \text{यदि } x \in \mathbb{Q} \\ 1 ; \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

- (b) Using R-integrability show that -

$$\int_1^2 x dx = 3/2$$

R-समाकलनीयता की सहायता से प्रदर्शित कीजिए कि -

$$\int_1^2 x dx = 3/2$$

8. (a) Show that the functions $f(x) = |x|$ is R-integrable in $[0, 3]$ and find the value of -

$$\int_1^3 f(x) dx$$

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x) = |x|$, $[0, 3]$ में R-समाकलनीय है तथा का मान ज्ञात कीजिए -

$$\int_1^3 f(x) dx$$

- (b) If $f, g \in R[a, b]$, then show that $(f+g) \in R[a, b]$.
यदि $f, g \in R[a, b]$, तब प्रदर्शित कीजिए कि $(f+g) \in R[a, b]$

UNIT-V / इकाई-V

9. (a) Test the uniform convergence of $\{f_n(x)\}$, where -

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

अनुक्रम का एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए, जहाँ -

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}; 0 \leq x \leq 1$$

- (b) Show that the following series converges uniformly on \mathbb{R} -

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न श्रेणी, \mathbb{R} में एकसमान अभिसारी है -

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}$$

10. (a) Show that the series whose sum of n terms is following, can be integrated term by term -

$$S_n(x) = \frac{1}{1+nx}; 0 \leq x \leq 1$$

प्रदर्शित कीजिए कि जिसके प्रथम n पदों का योग निम्न है, का पदशः समाकलन किया जा सकता है -

$$S_n(x) = \frac{1}{1+nx}; 0 \leq x \leq 1$$

- (b) Examine the following series for term by term integration -

$$\sum x^{n-1} (1 - 2x^n); x \in [0, 1]$$

निम्न श्रेणी को पदशः समाकलन के लिए परीक्षण कीजिए -

$$\sum x^{n-1} (1 - 2x^n); x \in [0, 1]$$