

This question paper contains 4 printed pages.

B.A./B.Sc. (Part-III)

3125/3175-A-III

B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2023

(Common for the Faculties of Arts and Science)

[Also Common with Subsidiary Paper of B.A./B.Sc. (Hons.) Part-III]

(Three-Year Scheme of 10+2+3 Pattern)

MATHEMATICS-III

(MECHANICS)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : $\begin{cases} 40 \text{ for Science} \\ 54 \text{ for Arts} \\ 32 \text{ Old Scheme} \end{cases}$

समय : 3 घंटे

अधिकतम अंक : 32 Old Scheme

No supplementary answer-book will be given to any candidate. Hence the candidate should write the answers precisely in the main answer-book only.

किसी भी परीक्षार्थी को पूरक उत्तर-पुस्तिका नहीं दी जाएगी। अतः परीक्षार्थियों को चाहिए कि वे मुख्य उत्तर-पुस्तिका में ही समस्त प्रश्नों के उत्तर लिखें।

All the parts of one question should be answered at one place in the answer-book. One complete question should not be answered at different places in the answer-book.

किसी भी प्रश्न के अन्तर्गत पूछे गए विभिन्न प्रश्नों के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अलग-अलग स्थानों पर हल करने के बजाय एक ही स्थान पर हल करें।

Attempt five questions in all, selecting one question from each unit.

प्रत्येक इकाई में से कम से कम एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Write your roll number on question paper before start writing answers of questions.

प्रश्नों के उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न-पत्र पर रोल नम्बर अवश्य लिखें।

UNIT - I / इकाई - I

1. (a) The radial and transverse velocities of a particle are λr^2 and $\mu \theta^2$, show that the equation to the path of the particle is $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\mu}{2r^2} + c$ and the components of accelerations are $2\lambda^2 r^3 - \frac{\mu^2 \theta^4}{r}$ and

$$\lambda \mu r \theta^2 + 2\mu^2 \left(\frac{\theta^3}{r} \right)$$

किसी कण के अरीय व अनुप्रस्थ वेग क्रमशः λr^2 तथा $\mu \theta^2$ है। सिद्ध करो कि कण के पथ का समीकरण $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\mu}{2r^2} + c$

होगा और उसके त्वरण के घटक $2\lambda^2 r^3 - \frac{\mu^2 \theta^4}{r}$ तथा $\lambda \mu r \theta^2 + 2\mu^2 \left(\frac{\theta^3}{r} \right)$ होंगे।

(b) A point moves in a plane curve so that its tangential acceleration is constant and the magnitude of the tangential velocity and normal acceleration are in constant ratio. Show that the intrinsic equation of the path is of the form $S = A\phi^2 + B\phi + C$.

एक कण एक समतल वक्र में इस प्रकार गमन करता है कि इसका स्पर्श रेखीय त्वरण अचर रहता है और इसके स्पर्शरेखीय वेग का परिमाण तथा अभिलांबिक त्वरण का अनुपात अचर है। सिद्ध करो कि पथ का नैज समीकरण $S = A\phi^2 + B\phi + C$ रूप में होगा।

2. (a) Show that the particle executing simple harmonic motion requires $\frac{1}{6}$ of its period to move from the position of maximum displacement to one in which the displacement is half the amplitude.

प्रदर्शित कीजिये कि सरल आवर्त गति करने वाले कण को अधिकतम विस्थापन की स्थिति से आधे आयाम तक के विस्थापन तक पहुँचने में आवर्तकाल के $\frac{1}{6}$ भाग की आवश्यकता पड़ती है।

- (b) One end of an elastic string is fixed at a point on a smooth horizontal table and to the other end a particle of mass m is attached. The particle is pulled upto a small distance and then released. Find its velocity at any point.

एक प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा एक चिकनी समतल मेज के एक बिन्दु से बंधा है और दूसरे सिरे से एक m संहति का कण बंधा है। कण को कुछ दूरी तक खींचा गया और छोड़ दिया जाता है। किसी बिन्दु पर इसका वेग ज्ञात कीजिए।

UNIT - II / इकाई - II

3. (a) ACB is a horizontal straight line of length $a + b$. A heavy particle at C is attached by an inextensible string of length b to A and by an unstretched elastic string of length a to B if, when the particle starts from string AC just oscillates through a right angle and the modulus of elasticity of the elastic string is equal to twice the weight of the particle prove that $4a^3 = b(a + 2b)^2$.

ACB एक क्षैतिज सरल रेखा है जिसकी लम्बाई $a + b$ है। एक भारी कण C पर, एक अप्रत्यास्थ डोरी जिसकी लम्बाई b है को A से बांधा तथा एक प्रत्यास्थ डोरी जिसकी स्वाभाविक लम्बाई a है को B से बांधा। यदि जब कण विरामावस्था से चलना प्रारम्भ करता है, तब AC डोरी 90° कोण पर आवर्तन करती है। डोरी का प्रत्यास्थ मापांक कण के दुगुने भार के बराबर है, तो सिद्ध कीजिये कि $4a^3 = b(a + 2b)^2$ ।

A heavy particle is projected vertically in a resisting medium, the resistance varying as the velocity. If v_1 and v_2 are its velocities at any point in its upward and downward paths and t the interval between its passage through this point, if V be the terminal velocity. Prove that

$$V - v_2 = (V + v_1)e^{-gt/v}$$

एक भारी कण उर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर ऐसे माध्यम में फेंका जाता है कि जिसका प्रतिरोध वेग के समानुपाती है। यदि किसी बिन्दु पर कण का वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 ऊपर जाते तथा नीचे आते समय हो तथा बिन्दु से गुजरने में समय का अन्तराल t हो, यदि V कण का अन्तिम वेग है तो सिद्ध कीजिये $V - v_2 = (V + v_1)e^{-gt/v}$ ।

4. (a) A heavy particle slides down the circle or surface of smooth fixed sphere of radius a , being slightly displaced from rest at the highest point. Find where it will leave the circle. Also find velocity at this point.

त्रिज्या a के एक चिकने स्थिर वृत्त या गोले की सतह के उच्चतम बिन्दु पर कण विरामावस्था में है, जो थोड़ा सा विस्थापित किये जाने पर नीचे की ओर सरकने लगता है। ज्ञात कीजिये कि वह वृत्त से कहाँ पर अलग हो जायेगा और इस बिन्दु पर वेग भी ज्ञात कीजिये।

- (b) A particle is projected so as to have a range R on the horizontal plane through the point of projection. If α and β are the possible angles of projection and t_1 and t_2 the corresponding times

of flights, show that
$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

एक कण इस प्रकार से फेंका जाता है कि प्रक्षेप बिन्दु से गुजरने वाले क्षैतिज समतल पर परास R है। यदि α तथा β सम्भव

प्रक्षेप कोण हों तथा t_1 व t_2 संगत उड़ने का काल हो, तो सिद्ध करो कि
$$\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

UNIT - III / इकाई - III

5. (a) In a central orbit the force is $\mu u^3 (3 + 2a^2 u^2)$; if the particle be projected at a distance 'a' with velocity $\sqrt{5\mu/a^2}$ in a direction making $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ with the radius vector, show that the equation to the path is $r = a \tan \theta$.

एक सकेन्द्र कक्षा में बल $\mu u^3 (3 + 2a^2 u^2)$ है। a दूरी पर स्थित एक कण को ध्रुवान्तर से $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ कोण बनाते हुए $\sqrt{5\mu/a^2}$ वेग से प्रक्षेपित किया गया है, तो प्रदर्शित कीजिये कि कण के पथ का समीकरण $r = a \tan \theta$ है।

- (b) If v_1 and v_2 are the velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that $(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$.
यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के रेखीय वेग हो जबकि वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम दूरियों पर है, तो सिद्ध कीजिये कि $(1 - e)v_1 = (1 + e)v_2$ ।

6. (a) Find the moment of inertia (M.I.) of a rectangular lamina about one of its sides.

एक आयताकार पटल का उसकी भुजा के परितः जड़त्व-आघूर्ण ज्ञात करिये।

- (b) Show that the moment of inertia of an ellipse of mass M and semi axes a and b about a tangent at a distance p from the centre is $\frac{5}{4} Mp^2$.

सिद्ध कीजिये कि M संहति तथा अर्धक्षि a तथा b के दीर्घवृत्तीय पटल का उसके केन्द्र से p दूरी पर स्थित किसी स्पर्श रेखा के परितः जड़त्व आघूर्ण $\frac{5}{4} Mp^2$ है।

UNIT - IV / इकाई - IV

7. (a) A rod is movable in a vertical plane about a hinge at one end, other end is fastened to a weight equal to half the weight of the rod, this end is fastened by a string of length l to a point at a height C vertically over the hinge, show that the tension of the string is $l W/C$, where W is the weight of the rod.

एक दण्ड अर्ध्वाधर समतल में एक सिरे पर सिरे एक कब्जे पर घूम रहा है और उसके दूसरे सिरे पर दण्ड के भार के आधे के बराबर एक भार बंधा है। यह सिरा एक दूरी से बंधा हुआ है, जिसकी लम्बाई l है और जिसका दूसरा सिरा कब्जे से उर्ध्वाधर ऊँचाई C पर बंधा है। सिद्ध करो कि तनाव $l W/C$ है, जहाँ W दण्ड का भार है।

- (b) Three forces P, 2P and 3P act, along the sides AB, BC and CA of a given equilateral triangle ABC. Find the magnitude and direction of their resultant and find also the point in which its line of action meets the side BC.

एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के अनुदिश क्रमशः बल P, 2P और 3P क्रियाशील है। इनके परिणामी का परिमाण व दिशा ज्ञात करो और वह बिन्दु भी ज्ञात करो जहाँ इसकी क्रियारेखा BC को काटती है।

8. (a) Prove that the least force required to pull a body of weight W on a rough horizontal plane is $W \sin \lambda$, where λ is the angle of friction.

सिद्ध कीजिये कि 'W' भार के एक पिण्ड को रुक्ष क्षैतिज समतल पर खींचने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल $W \sin \lambda$, है, जहाँ λ घर्षण कोण है।

- (b) A uniform circular ring of weight W, has a particle of weight ω attached to its circumference. Show that it can be placed over a rough peg, in a position of equilibrium with any point in contact

with the peg, provided that the angle of friction is not less than $\sin^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega + W}\right)$.

W भार वाली एकसमान वृत्ताकार वलय की परिधि पर ω भार का एक कण बंधा है। प्रदर्शित कीजिये कि इसे रुक्ष खूँटी के सम्पर्क में किसी भी बिन्दु से साम्यावस्था में रखा जा सकता है बशर्ते कि घर्षण कोण $\sin^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega + W}\right)$ से कम नहीं हो।

UNIT - V / इकाई - V

9. (a) Five weightless rods of equal lengths are jointed together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD, if a weight W be attached to C and the system be suspended from A, show that there is a thrust in BD equal to $\frac{W}{\sqrt{3}}$.

समान लम्बाई के पाँच भारहीन छड़ परस्पर जोड़े गये हैं ताकि एक विकर्ण BD सहित समचतुर्भुज ABCD बने। यदि C पर एक भार W बाँध दिया जाये और निकाय को A से लटकाया जाए, तो सिद्ध कीजिये कि BD में प्रणोद $\frac{W}{\sqrt{3}}$ के तुल्य है।

- (b) Two equal uniform rods AB and AC, each of length 2b, are freely jointed at A and rests on a smooth vertical circle of radius a. Show that if 2θ be the angle between them, then $b \sin^3\theta = a \cos\theta$.

2b लम्बाई की दो बराबर एकसमान छड़ें AB और AC, A पर स्वच्छन्दतापूर्वक जुड़ी हुई है और a त्रिज्या के ऊर्ध्वाधर वृत्त पर रखी हुई है। सिद्ध कीजिये कि, यदि उनके मध्यस्थ कोण 2θ हों, तो $b \sin^3\theta = a \cos\theta$ ।

10. (a) The extremities of a heavy string of length 2l and weight 2lw, are attached to two small rings which can slide on a fixed horizontal wire. Each of these rings is acted on by a horizontal force equal to lw; show that the distance apart of the rings is $2l \log(1 + \sqrt{2})$.

2l लम्बाई की 2lw भार वाली भारी डोरी के छोरों पर दो छोटी घिरनियाँ लगी हैं जो एक स्थिर क्षैतिज तार पर फिसलती हैं। इन प्रत्येक घिरनियों पर lw के बराबर का क्षैतिज बल लगा हुआ है। प्रदर्शित कीजिये कि इन घिरनियों के मध्य दूरी $2l \log(1 + \sqrt{2})$ है।

- (b) A uniform chain, of length 2l, has its ends attached to two points in the same horizontal line at a distance 2a apart. If l is only a little greater than a, show that the tension of the chain is

approximately equal to the weight of a length $\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$ of the chain.

2l लम्बाई की एकसमान जंजीर के दो सिरे क्षैतिज रेखा पर 2a दूरी पर दो बिन्दुओं पर हैं। यदि l, a से कुछ ही बड़ा हो,

तो प्रदर्शित कीजिये कि जंजीर में तनाव लगभग $\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$ लम्बी जंजीर के भार के बराबर है।

- o O o -

<https://www.uoronline.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से