## MATHEMATICS
### THIRD PAPER
### (Three Dimensional Geometry and Optimization Theory)

**Time Allowed : Three Hours** **Maximum Marks :32 for Science**
**44 for Arts**

### Unit I ( इकाई I )

$A(\alpha,\beta,\gamma)$ with respect to the sphere:

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

गोले के ध्रुव एवं ध्रुवीय समतल को परिभाषित कीजिये तथा बिन्दु $A(\alpha,\beta,\gamma)$ का गोले $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ के सापेक्ष ध्रुवीय समतल ज्ञात कीजिये।

(b) Prove that the centers of spheres which touch the lines $y=mx$, $z=c$ and $y=-mx$, $z=-c$ lie upon the conicoid $mxy+cz(1+m^2)=0$.

सिद्ध कीजिये कि रेखाओं $y=mx, z=c$ एवं $y=-mx, z=-c$ को स्पर्श करने वाले गोलों के केन्द्र शांकवज $mxy+cz(1+m^2)=0$ पर स्थित हैं।

2. (a) Define reciprocal cone and find the equation of reciprocal cone of the cone $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$.

व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिये एवं शंकु $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ के व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(b) Show that the lines drawn through the origin at right angles to the normal planes of the cone $ax^2+by^2+cz^2=0$ generates the cone:

$$\frac{a(b-c)^2}{x^2}+\frac{b(c-a)^2}{y^2}+\frac{c(a-b)^2}{z^2}=0.$$

सिद्ध कीजिये कि शंकु $ax^2+by^2+cz^2=0$ के अभिलम्ब समतलों पर मूल बिन्दु से लम्बवत खींची गई रेखाएँ शंकु:

$$\frac{a(b-c)^2}{x^2}+\frac{b(c-a)^2}{y^2}+\frac{c(a-b)^2}{z^2}=0.$$

का निर्माण करती हैं।

### Unit II ( इकाई II )

3. (a) Define enveloping cylinder and find the equation of enveloping cylinder of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$ whose generators are parallel to the line $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

अन्वालोपी बेलन की परिभाषा लिखिए तथा गोले $x^2+y^2+z^2=a^2$ की अन्वालोपी बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी जनक रेखायें $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ के समान्तर हैं।

(b) Prove that the locus of the foot of the perpendicular drawn from the centre of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ to any of its tangent planes is:

$$\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$ 282

सिद्ध कीजिये कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के किसी स्पर्श समतल पर केन्द्र से डाले गये लम्बपाद का बिन्दुपथ है- $\left(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$

4. (a) Show that the six normals from the point $(\alpha,\beta,\gamma)$ to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ lie on the cone: $\frac{\alpha(b^2-c^2)}{x-\alpha}+\frac{\beta(a^2-b^2)}{y-\beta}+\frac{\gamma(a^2-b^2)}{z-y}=0$

सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(\alpha,\beta,\gamma)$ से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ पर खींचे गये अभिलम्ब शंकु $\frac{\alpha(b^2-c^2)}{x-\alpha}+\frac{\beta(c^2-a^2)}{y-\beta}+\frac{\gamma(a^2-b^2)}{z-\gamma}=0$ पर स्थित होते हैं।

(b) Prove that for all values of $\lambda$, the normals to the conicoid $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$ which pass through a given point $(\alpha,\beta,\gamma)$ meet the plane $z=0$ in the points on the conic:

सिद्ध कीजिये कि $\lambda$ के प्रत्येक मान के लिए, शांकवज $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$ के अभिलम्ब जो एक दिये हुये बिन्दु $(\alpha,\beta,\gamma)$ से गुजरते हैं, समतल $z=0$ को निम्न शांकव के बिन्दुओं पर मिलते हैं-

$$\left(c^2-a^2\right)\frac{a}{x}+\left(b^2-c^2\right)\frac{\beta}{y}+\left(a^2-b^2\right)=0.$$

### Unit III ( इकाई III )

5. (a) Show that the projections of generatiors of hyperboloid of one sheet on the principal planes are tangents to the conic section of the hyperboloid by the principal planes.

सिद्ध कीजिये कि मुख्य समतलों पर एक पृष्ठीय अतिपरवलयज की जनक रेखाओं के प्रक्षेप, मुख्य समतल एवं अतिपरवलयज के प्रतिच्छेदी शांकव को स्पर्श करते हैं।

(b) The generators through a point $P$ on the hyperboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ meet principal elliptic section in the points whose eccentric angles differ by a constant $2a$. Show that the locus of $P$ is the curve of intersection of the hyperboloid with the cone $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2\sin^2\alpha}$.

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ के बिन्दु $P$ पर खींचे गये जनक मुख्य दीर्घवृत्तीय खण्ड से जिन बिन्दुओं पर मिलते हैं उनके उत्केन्द्र कोणों का अंतर $2\alpha$ है। सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $P$ का बिन्दुपथ शंकु $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2\sin^2\alpha}$ और अतिपरवलयज का प्रतिच्छेदी वक्र है।

6. (a) Find the principal directions and principal planes of the following conicoid:
निम्न शांकवज की मुख्य दिशाएं एवं मुख्य समतल ज्ञात कीजिये-

$36x^2+4y^2+z^2-4yz-12zx+24xy+4x+16y-26z=0.$

(b) Reduce the equation $11x^2+10y^2+6z^2-8yz+4zx-12xy+72x-72y+36z+150=0$ to the standard form and give the nature of the surface. Also find the equation of its axis.

समीकरण $11x^2+10y^2+6z^2-8yz+4zx-12xy+72x-72y+36z+150=0$ का मानक रूप में समानयन कीजिये तथा पृष्ठ का स्वरूप ज्ञात कीजिये। साथ ही इसके अक्ष का समीकरण भी ज्ञात कीजिये।

## Unit IV ( इकाई IV )

7 (a) Find all basic feasible solutions of the following system of equations:

निम्न समीकरण निकाय के सभी आधारी सुसंगत हलों को ज्ञात कीजिये

$2x_1+3x_2+5x_3=30$

$3x_1-x_2+7x_3=21$

$x_1,x_2,x_3\geq 0.$

(b) Show that the set of all feasible solutions of a linear programming problem is a convex set:

सिद्ध करो कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय का अवमुख समुच्चय होता है।

8. (a) If $x_1=2, x_2=3, x_3=1$ be a feasible solution of the following linear programming problem then reduce it to a basic feasible solution:

Max $z=x_1+2x_2+4x_3$

s.t. $2x_1+x_2+4x_3=11$

$3x_1+x_2+5x_3=14$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

यदि $x_1=2, x_2=3, x_3=1$ निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या का एक सुसंगत हल है तो इसे आधारी सुसंगत हल में समानीत कीजिये:-

अधिकतम करो $z=x_1+2x_2+4x_3$

प्रतिबंध $2x_1+x_2+4x_3=11$

$3x_1+x_2+5x_3=14$

$x_1,x_2,x_3\geq 0$

(b) If $X_0$ is a feasible solution to the primal problem

max $z=CX$ s.t. $AX\leq b, \alpha\geq 0$

and $W_0$ be a feasible solution of its dual then show that $CX_0\leq b^TW_0.$

यदि आद्य समस्या करो $z=CX$ प्रतिबंध $AX\leq b, \alpha\geq 0$ का $X_0$ एक सुसंगत हल है तथा $W_0$ इसकी द्वैती का सुसंगत हल है तो सिद्ध कीजिये कि $CX_0\leq b^TW_0$ है।