

Unit I (इकाई I)

1. (a) The set Q of rational numbers is not a complete ordered field.

परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं होता है।

5/7

- (b) State and prove Bolzano-Weierstrass theorem.

बोलजानो वाइरस्ट्रास प्रमेय का कथन एवं इसे सिद्ध कीजिये।

1 + 4/2 + 5

2. (a) Define connected set and prove that the set R of real numbers is connected.

सम्बद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिये एवं सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R सम्बद्ध है।

1 + 4/2 + 5

- (b) Let a real sequence $\{x_n\}$ be defined by:

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{if } n \text{ is even} \\ 1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

show that limit of the sequence $\{x_n\}$ does not exist.

माना एक वास्तविक अनुक्रम $\{x_n\}$ निम्न प्रकार परिभाषित है-

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ 1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

rtuonline.com

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\{x_n\}$ की सीमा विद्यमान नहीं है।

5/7

Unit II (इकाई II)

3. (a) Prove that every bounded sequence has a convergent subsequence.

सिद्ध कीजिये प्रत्येक परिबद्ध अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम होता है।

5/6

- (b) Applying Cauchy general principle of convergence, show that the real sequence $\{x_n\}$ defined by:

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \quad \forall n \in N$$

is not convergent.

अनुक्रमों के अभिसरण के लिये कोशी के सामान्य सिद्धान्त को प्रयोग कर सिद्ध कीजिये कि

वास्तविक अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ-

rtuonline.com

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \quad \forall n \in N$$

अभिसारी नहीं है।

5/7

4. (a) Let f be a real valued continuous function defined on a closed interval $[a, b]$.

Then prove that f attains its supremum and infimum value in $[a, b]$.

यदि f एक वास्तविक मान फलन $[a, b]$ पर परिभाषित तथा संतत हो तो सिद्ध कीजिये कि फलन f अपने उच्चतम तथा निम्नतम मान $[a, b]$ में प्राप्त करता है।

5/6

- (b) If f is differentiable in $[a, b]$ and $f'(a)$ and $f'(b)$ are of opposite signs then

prove that there exists at least one point $c' (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

यदि f , अंतराल $[a, b]$ में अवकलनीय है तथा $f'(a)$ एवं $f'(b)$ विपरीत चिन्हों के हों तो सिद्ध कीजिये कि विवृत अंतराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c ऐसा विद्यमान होगा ताकि $f'(c) = 0$ ।

rtuonline.com Unit III (इकाई III)

5. (a) Prove that the function $f(x, y) = xy$ is continuous at each point of the xy plane.

सिद्ध कीजिये कि फलन $f(x, y) = xy$ समतल xy के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है।

5/6

- (b) If f is defined in $[0, 1]$ as follows:

$$f(x) = \begin{cases} p/q, & \text{when } x \text{ is rational and } x \neq 0, (p, q) = 1 \\ 0, & \text{when } x \text{ is irrational} \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

then show that $f \in R[0, 1]$ and $\int_0^1 f(x) dx = 0$

अंतराल $[0, 1]$ में f निम्न प्रकार परिभाषित है-

$$f(x) = \begin{cases} p/q, & \text{जब } x \text{ परिमेय एवं } x \neq 0, (p, q) = 1 \\ 0, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय} \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

rtuonline.com

तो सिद्ध कीजिये कि $f \in R[0, 1]$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$ है।

5/7

6. (a) If $f \in R[a, b]$ and if there exists a primitive function ϕ on interval $[a, b]$,

then show that:-

758

यदि $f \in R[a, b]$ तथा f का पूवर्ग ϕ अंतराल $[a, b]$ पर विद्यमान है, तो सिद्ध कीजिये कि-

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a)$$

5/6

- (b) State and prove the fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन गणित की मूल का कथन एवं इसे सिद्ध कीजिये।

5/7

Unit IV (इकाई IV)

- 7 (a) Prove that if δ is any fixed positive number less than unity, then series

$$\sum \frac{x^n}{(n+1)}$$

सिद्ध कीजिये कि यदि δ कोई नियत धनात्मक संख्या कम से कम है तो $\sum \frac{x^n}{(n+1)}$, $[-\delta, \delta]$ में

एकसमान अभिसृत होती है।

rtuonline.com

5/6

(b) If $\{f_n\}$ be sequence of functions on $[a, b]$ and converges uniformly to the function $f(x)$ on $[a, b]$ and if f_n is R-integrable on $[a, b]$ then prove that:-

यदि किसी अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित वास्तविक मान फलनों का अनुक्रम $\{f_n(x)\}, [a, b]$ पर $f(x)$ को एकसमान अभिसृत होता है तथा यदि f_n अंतराल $[a, b]$ पर R- समाकलनीय है, तो सिद्ध कीजिये कि-

rtuonline.com

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx. \quad 5/6$$

8. (a) Test for uniform convergence and term by term integration of the following series-

निम्न श्रेणी की एकसमान अभिसरण तथा पदशः समाकलनीयता के लिये परीक्षण कीजिये-

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2} \quad 5/6$$

(b) Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिये कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय होता है। 5/6

Unit V (इकाई V)

9. (a) Define subspace of a metric space. If X_1 and X_2 are two metric spaces and G_1, G_2 are open sets in X_1 and X_2 respectively, then prove that $G_1 \times G_2$ is an open set in $X_1 \times X_2$.

दूरीक समष्टि की उपसमष्टि को परिभाषित कीजिये। यदि X_1 तथा X_2 दो दूरीक समष्टियाँ हैं एवं G_1, G_2 क्रमशः X_1 व X_2 में विवृत समुच्चय हैं तो सिद्ध कीजिये कि $G_1 \times G_2, X_1 \times X_2$ में विवृत समुच्चय होगा।

rtuonline.com

1 + 4 / 1½, 5

(b) Define complete metric space and show that every complete metric space is of second category as subset of itself.

पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये। एवं प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक पूर्ण दूरीक समष्टि स्वयं का उपसमुच्चय मानते हुये द्वितीय संवर्ग का होता है। 750 1 + 4 / 1½ + 5

10. (a) Prove that a compact subset of a metric space is closed and bounded.

सिद्ध कीजिये कि दूरीक समष्टि (X, d) का संहत उपसमुच्चय संवृत एवं परिबद्ध होता है। 5/6

(b) Define connected metric space and prove that any continuous image of a connected space is connected.

सम्बद्ध समष्टि को परिभाषित कीजिये एवं सिद्ध कीजिये कि किसी सम्बद्ध दूरीक समष्टि का किसी दूरीक समष्टि में एक संतत प्रतिचित्रण के अन्तर्गत प्रतिबिम्ब संबद्ध होता है। 1 + 4/2 + 5